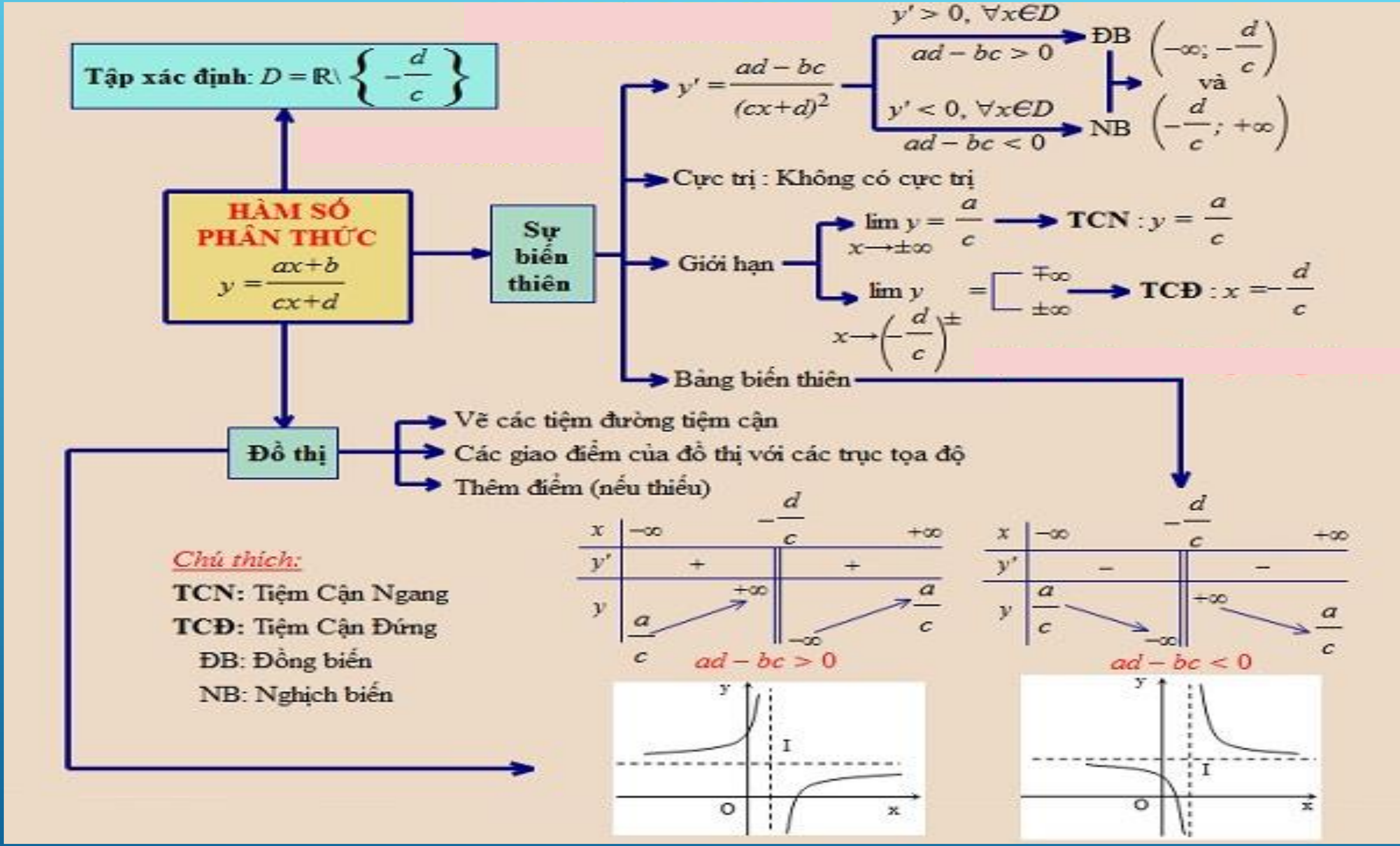
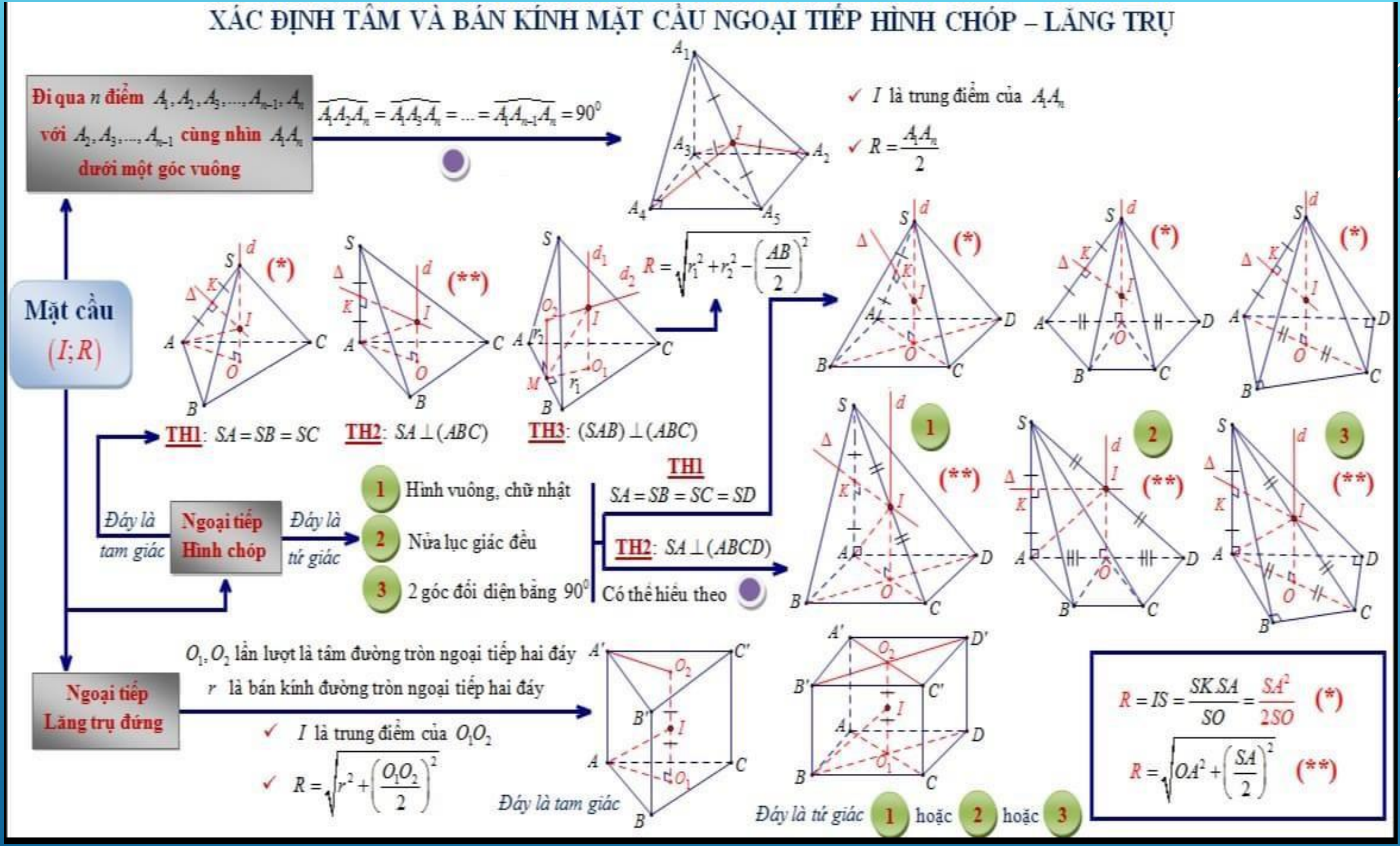

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$
HÀM SỐ PHÂN THỨC $y = \frac{ax+b}{cx+d}$
Sự biến thiên
$y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
$y' > 0, \forall x \in D$
$ad - bc > 0$
ĐB $\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right)$ và $\left(-\frac{d}{c}; +\infty\right)$
$y' < 0, \forall x \in D$
$ad - bc < 0$
NB
Cực trị : Không có cực trị
Giới hạn
$\lim_{x \to \pm\infty} y = \frac{a}{c}$
TCN : $y = \frac{a}{c}$
$\lim_{x \to \left(-\frac{d}{c}\right)^{\pm}} y = \mp\infty$, $\pm\infty$
TCĐ : $x = -\frac{d}{c}$
Bảng biến thiên
Đồ thị
Vẽ các tiệm đường tiệm cận
Các giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ
Thêm điểm (nếu thiếu)
Chú thích:
TCN: Tiệm Cận Ngang
TCĐ: Tiệm Cận Đứng
ĐB: Đồng biến
NB: Nghịch biến
$x$ | $-\infty$ | $-\frac{d}{c}$ | $+\infty$
$y'$ | $+$ | $+$
$y$ | $\frac{a}{c}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $\frac{a}{c}$
$ad - bc > 0$
$x$ | $-\infty$ | $-\frac{d}{c}$ | $+\infty$
$y'$ | $-$ | $-$
$y$ | $\frac{a}{c}$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $\frac{a}{c}$
$ad - bc < 0$
y
x
O
I

**TRUNG TÂM GIA SƯ PHÚ XUÂN HẠ LONG**

" Nơi Khơi Nguồn Tri Thức"



**TRUNG TÂM GIA SƯ PHÚ XUÂN HẠ LONG**

" Nơi Khơi Nguồn Tri Thức"

# HÀM MŨ – HÀM LOGARIT

## KIẾN THỨC CẦN NHỚ 1

### CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI

**LŨY THỪA**

Fb: facebook.com/ThayTungToan

1. $a^0 = 1$
2. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
3. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
4. $\left(a^\alpha\right)^\beta = a^{\alpha\beta}$
5. $a^\alpha . a^\beta = a^{\alpha+\beta}$
6. $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$
7. $a^\alpha . b^\alpha = (ab)^\alpha$
8. $\dfrac{a^\alpha}{b^\alpha} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha$

- Khi xét lũy thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm thì cơ số phải khác 0.
- Khi xét lũy thừa với số mũ không nguyên thì cơ số phải dương.

**LÔGARIT**

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$
4. $\log_a b - \log_a c = \log_a \dfrac{b}{c}$
5. $a^{\log_a b} = b$
6. $\log_{a^\alpha} b^\beta = \dfrac{\beta}{\alpha}\log_a b \rightarrow \begin{cases} \log_a b^\beta = \beta \log_a b \\ \log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha}\log_a b \end{cases}$
7. $\log_a b . \log_b c = \log_a c \rightarrow \begin{cases} \log_a b . \log_b a = 1 \rightarrow \log_a b = \dfrac{1}{\log_b a} \\ \log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b} \end{cases}$

- $\log_a b$ có nghĩa khi $\begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ b > 0 \end{cases}$
- Lôgarit thập phân: $\log_{10} b = \log b = \lg b$
- Lôgarit tự nhiên ( lôgarit Nêpe) : $\log_e b = \ln b \quad (e \approx 2,71828)$

### GIỚI HẠN

1. $\lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
2. $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
3. $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

### ĐẠO HÀM

1. $\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1}.u' \rightarrow \begin{cases} \left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1} \\ \left(\sqrt[n]{u}\right)' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \end{cases}$
2. $\left(a^u\right)' = u' a^u \ln a \rightarrow \begin{cases} \left(a^x\right)' = a^x \ln a \\ \left(e^u\right)' = u' e^u \\ \left(e^x\right)' = e^x \end{cases}$
3. $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u \ln a} \rightarrow \begin{cases} \left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a} \\ (\ln u)' = \dfrac{u'}{u}; \quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

- $\left(u^v\right)' = u^v.(v \ln u)'$ (Tổng quát của 1 và 2)

**HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG**
$y = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \neq 0)$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- **Sự biến thiên**
  - Xác định dấu $y'$ → Chiều biến thiên
  - Cực trị: Nếu
    - $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt → Có 3 cực trị
    - $y' = 0$ có 1 nghiệm $x = 0$ → Có 1 cực trị
  - Giới hạn: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \left[\begin{array}{l} +\infty \text{ khi } a > 0 \\ -\infty \text{ khi } a < 0 \end{array}\right.$
  - Bảng biến thiên
- **Đồ thị**
  - Các điểm cực trị
  - Các giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (nếu "đẹp")
  - Thêm điểm (nếu thiếu)

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $0$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | ↘ | $y_{CT}$ | ↗ | $y_{CĐ}$ | ↘ | $y_{CT}$ | ↗ | $+\infty$ |

$a > 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $0$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $-\infty$ | ↗ | $y_{CĐ}$ | ↘ | $y_{CT}$ | ↗ | $y_{CĐ}$ | ↘ | $-\infty$ |

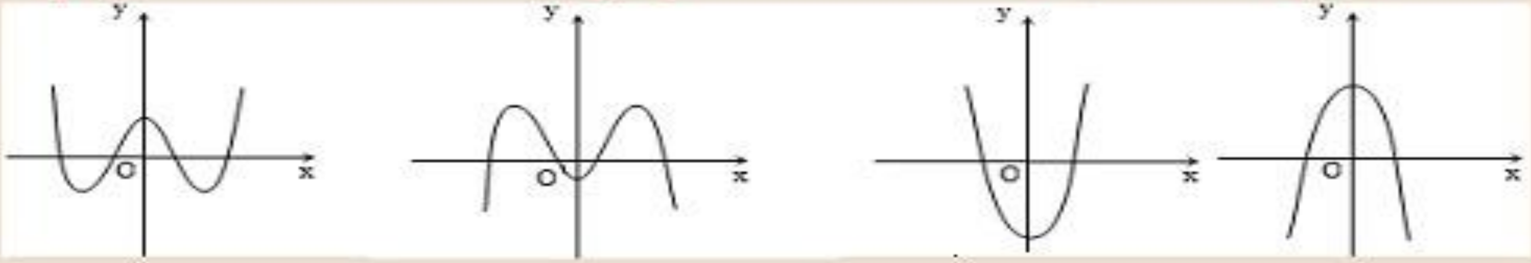
$a < 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | ↘ | $y_{CT}$ | ↗ | $+\infty$ |

$a > 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $-\infty$ | ↗ | $y_{CĐ}$ | ↘ | $-\infty$ |

$a < 0$



# NGUYÊN HÀM

**Công thức cơ bản cần nhớ**

## ĐN, TÍNH CHẤT

① $\int f(x)\,dx = F(x)+C \Rightarrow [F(x)+C]' = f(x)$.

② $\int f'(x)\cdot dx = f(x)+C$.

③ $\int k\cdot f(x)\cdot dx = k\int f(x)\cdot dx$, với $k \neq 0$.

④ $\int [f(x)\pm g(x)]\cdot dx = \int f(x)\cdot dx \pm \int g(x)\cdot dx$.

## P.PHÁP TÍNH

① Dùng định nghĩa: Tìm $F(x)$ thỏa $[F(x)]' = f(x)$

② Biến đổi biểu thức $f(x)$ cần tính nguyên hàm về tổng, hiệu các biểu thức dễ tính nguyên hàm. Sau đó áp dụng bảng công thức.

③ Đổi biến số:

- Dấu hiệu nhận dạng: Có $u(x)$ và $u'(x)$
- $\boxed{\int f(u)\cdot u'dx}$: Đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'\cdot dx$

④ Công thức nguyên hàm từng phần:

- $\boxed{\int u\cdot v'dx = \int u\cdot d(v) = uv - \int v\cdot d(u)}$
- Với $p(x)$ là một đa thức. Ta thường gặp:

❒ $\int p(x)\cdot\{e^x;\sin x;\cos x\}\,dx$ :

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = p(x) \\ d(v) = \{e^x;\sin x;\cos x\}\,dx \end{cases}$$

❒ $\int p(x)\cdot \ln x\,dx$ : Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ d(v) = p(x)\,dx \end{cases}$

- Thứ tự cho $u$ : Nhất log, nhì đa, tam lượng, tứ mũ.

## VÀI PHÉP ĐỔI BIẾN CƠ BẢN

- $\int f(x^n)\cdot x^{n-1}\,dx$
  Đặt $t = x^n$
- $\int f(\sin x).\cos x\,dx$
  Đặt $t = \sin x$
- $\int f(\tan x)\dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx$
  Đặt $t = \tan x$
- $\int f(\sin^2 x)\sin 2x\,dx$
  Đặt $t = \sin^2 x$
- $\int f(e^x)e^x\,dx$
  [illegible]

## VI PHÂN

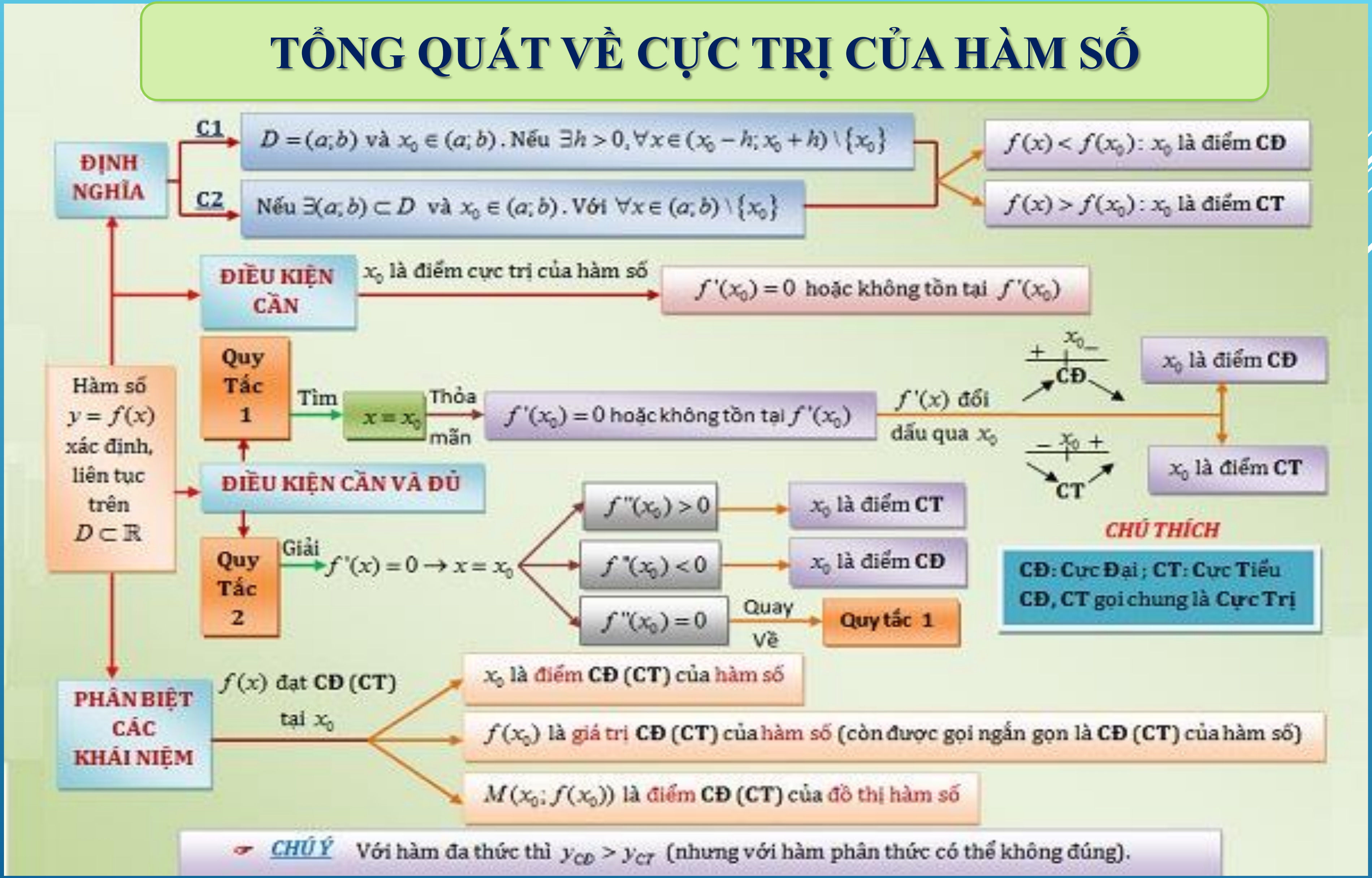
$y = v(x)$ thì

- $dy = v'(x)dx$
- $d(v) = v'(x)dx$

| Đạo hàm | Nguyên hàm | Nguyên hàm mở rộng $x \to ax$ (hoặc $ax+b$) |
|---|---|---|
| **Hàm số lũy thừa** | | |
| $(x)' = 1$ | $\int 1.dx = x + C$ | |
| $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ | Với $\alpha \neq -1$ thì: $\int x^\alpha\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ | $\int (ax+b)^\alpha\,dx = \dfrac{1}{a}.\dfrac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ |
| $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$ | $\int \dfrac{1}{x^2}\,dx = -\dfrac{1}{x}+C$ | $\int \dfrac{1}{(ax+b)^2}\,dx = -\dfrac{1}{a}.\dfrac{1}{ax+b}+C$ |
| Với $n \neq 1$ thì: $\int \dfrac{1}{x^n}\,dx = -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}+C$ | | $\int \dfrac{1}{(ax+b)^n}\,dx = -\dfrac{1}{a}.\dfrac{1}{(n-1)(ax+b)^{n-1}}+C$ |
| **Hàm số mũ** | | |
| $(e^x)' = e^x$ | $\int e^x\,dx = e^x + C.$ | $\int e^{ax+b}\,dx = \dfrac{1}{a}e^{ax+b}+C$ |
| $(a^x)' = a^x.\ln a$ | $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a}+C.$ | $\int a^{mx+n}\,dx = \dfrac{1}{m.\ln a}a^{mx+n}+C.$ |
| **Hàm số logarit** | | |
| $(\ln\|x\|)' = \dfrac{1}{x}$; $(\log_a\|x\|)' = \dfrac{1}{x\ln a}$ | $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln\|x\| + C.$ | $\int \dfrac{1}{ax+b}\,dx = \dfrac{1}{a}\ln\|ax+b\|+C.$; $\int \dfrac{1}{(ax+b)(cx+d)}\,dx = \dfrac{1}{ad-cb}\ln\left\|\dfrac{ax+b}{cx+d}\right\|+C.$ |
| **Hàm số lượng giác** | | |
| $(\sin x)' = \cos x$ | $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ | $\int \cos(ax+b)\,dx = \dfrac{1}{a}.\sin(ax+b)+C$ |
| $(\cos x)' = -\sin x$ | $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ | $\int \sin(ax+b)\,dx = -\dfrac{1}{a}.\cos(ax+b)+C$ |
| $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ | $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$ | $\int \dfrac{1}{\cos^2(ax+b)}\,dx = \dfrac{1}{a}.\tan(ax+b)+C$ |
| $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ | $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$ | $\int \dfrac{1}{\sin^2(ax+b)}\,dx = -\dfrac{1}{a}.\cot(ax+b)+C$ |

**TRUNG TÂM GIA SƯ PHÚ XUÂN HẠ LONG**

“ Nơi Khơi Nguồn Tri Thức”



# TÍCH PHÂN

**Một số kết quả cần nhớ**

## Định nghĩa

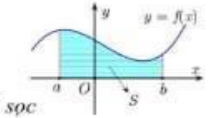
① Cho $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Giả sử $F(x)$ là 1 nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a;b]$. Khi đó :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

② Nếu $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a;b]$ thì:

$$\int_a^b f(x)\,dx = S$$

*Với $S$ là diện tích hình phẳng phần gạch sọc*




## Tính chất

① $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

② $\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$ ($k$ là hằng số)

③ $-\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx$

④ $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

⑤ $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

⑥ $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$

*(Tích phân không phụ thuộc biến)*

## TÍCH PHÂN HÀM HỮU TỈ

① $\int_a^b \frac{1}{mx+n}\,dx = \frac{1}{m}\ln|mx+n|\Big|_a^b$

② $\int_a^b \frac{1}{x^n}\,dx = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}\Big|_a^b$ $(n \neq 1)$

③ $\int_\alpha^\beta \frac{1}{(ax+b)(cx+d)}\,dx = \frac{1}{ad-cb}\ln\left|\frac{ax+b}{cx+d}\right|\Big|_\alpha^\beta$

④ Xét $I = \int_a^b \frac{1}{mx^2+nx+k}\,dx$

- Nếu $\Delta > 0$ : Gọi $x_1, x_2$ là hai nghiệm, ta có

$$I = \frac{1}{m(x_2-x_1)}\ln\left|\frac{x-x_2}{x-x_1}\right|\Big|_a^b$$ *(hoặc đưa về ③)*

- Nếu $\Delta = 0$ : Gọi $x_0$ là nghiệm kép, ta có

$$I = \int_a^b \frac{1}{m(x-x_0)^2}\,dx = -\frac{1}{m(x-x_0)}\Big|_a^b$$

⑤ Tổng quát : Xét $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$

- Bậc $P(x) \geq$ bậc $Q(x)$ : Chia đa thức
- Bậc $P(x) <$ bậc $Q(x)$ : Tách, đổi biến số.

## TÍCH PHÂN HÀM VÔ TỈ

① $\int_a^b f\left(\sqrt{x^n+m}\right)\cdot x^{n-1}\,dx \to$ Đặt $t = \sqrt{x^n+m}$

② $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{m^2-x^2}}\,dx \to$ Đặt $x = m\sin t$

## Phương pháp tính

**1. Đổi biến số:** $\int_a^b f(u)\cdot u'(x)\,dx$

- Đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)\,dx$
- Đổi cận $x = a \Rightarrow t = u(a)$

  $x = b \Rightarrow t = u(b)$
- Đưa về ẩn $t$ : $\int_a^b f(u)\cdot u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,dt$

**2. Từng phần** $\int_a^b u\cdot v'\,dx = \int_a^b u\cdot d(v)$

$$\int_a^b u\cdot d(v) = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\cdot d(u)$$

- Thứ tự cho biến $u$ :

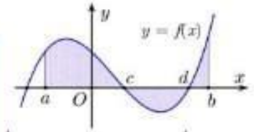
  “Nhất log, nhì đa, tam lượng, tứ mũ”

# ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

## 1. Diện tích hình phẳng

Cho hình $(H)$ giới hạn bởi

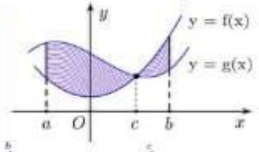
$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a, x = b\ (a<b) \end{cases} \Rightarrow S_H = \int_a^b |f(x)|\,dx$$




$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$$

Cho hình $(H)$ giới hạn bởi

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a, x = b\ (a<b) \end{cases} \Rightarrow S_H = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$



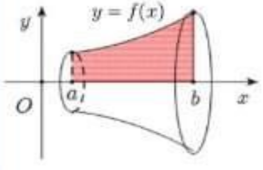

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx = \int_a^c [g(x)-f(x)]\,dx + \int_c^b [f(x)-g(x)]\,dx$$

## 2. Thể tích

① Cho hình $(H)$ giới hạn bởi

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a, x = b\ (a<b) \end{cases}$$ quay quanh $Ox$ .

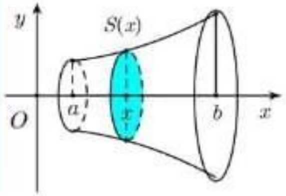
Khi đó $V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$




② Tính thể tích vật thể, khi biết “hàm” diện tích mặt cắt vuông góc với $Ox$

$$V = \int_a^b S(x)\,dx$$

*(không có thêm $\pi$ phía trước, khác với công thức số ① nhé!)*



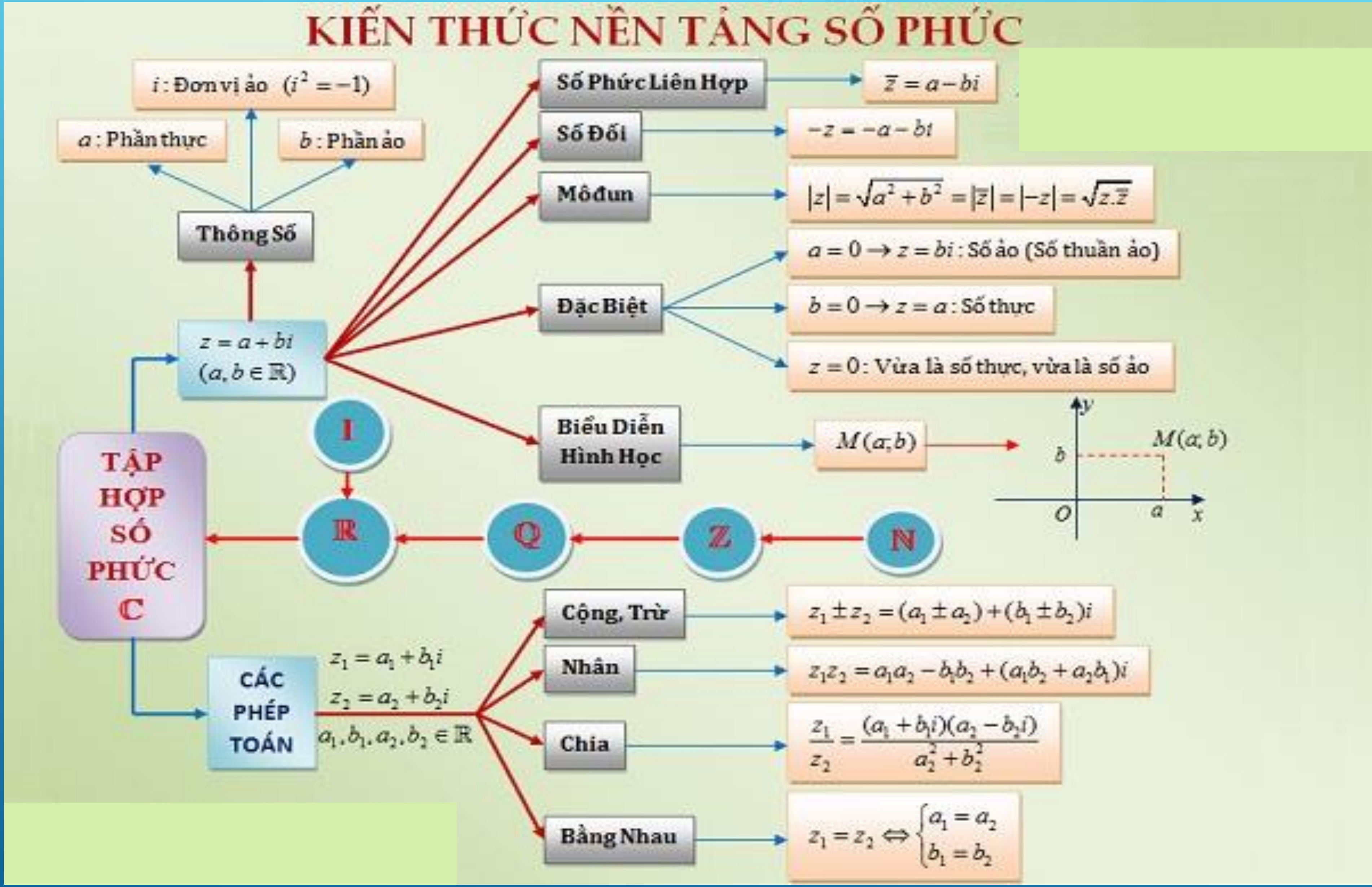

## 3. Ứng dụng vật lý

$$s(t) \underset{\text{Nguyên hàm}}{\overset{\text{Đạo hàm}}{\rightleftarrows}} v(t) \underset{\text{Nguyên hàm}}{\overset{\text{Đạo hàm}}{\rightleftarrows}} a(t)$$

| Quãng đường | Vận tốc | Gia tốc |
|---|---|---|

TRUNG TÂM GIA SƯ PHÚ XUÂN HẠ LONG

" Nơi Khơi Nguồn Tri Thức"



**TRUNG TÂM GIA SƯ PHÚ XUÂN HẠ LONG**

" Nơi Khơi Nguồn Tri Thức"